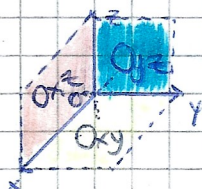
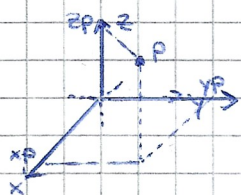


Geometria analitica nello spazio - Parte 1



Piani coordinati: $Oxy: z=0$ $O(0;0;0) \rightarrow$ origine degli assi
 $Oxz: y=0$ e del Sistema di Riferimento
 $Oyz: x=0$

Assi coordinati: asse $x: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ asse $y: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ asse $z: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$



$P(x_p; y_p; z_p)$
 ascissa ordinata quota

Distanza tra due punti

$$P(x_p; y_p; z_p) \quad Q(x_q; y_q; z_q) \quad PQ = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2}$$

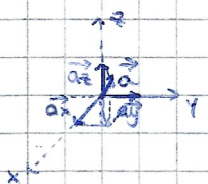
Punto medio di un segmento, M

$$A(x_A; y_A; z_A) \quad B(x_B; y_B; z_B) \quad M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Baricentro di un triangolo $\triangle ABC$, G

$$A(x_A; y_A; z_A) \quad B(x_B; y_B; z_B) \quad C(x_C; y_C; z_C) \quad G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

I vettori nello spazio



$$\vec{a}(a_x; a_y; a_z) \quad \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: VERSORI (vettori di modulo 1, direzioni degli ASSI COORDINATI)

$$\hat{i}(1; 0; 0) \quad \hat{j}(0; 1; 0) \quad \hat{k}(0; 0; 1)$$

Le componenti di $\vec{a}$ sono // agli assi coordinati; la somma di queste (vettorialmente) forma $\vec{a}$.

NB Vettore $\vec{AB}$: dati $A(x_A; y_A; z_A)$ con $A \neq B$ $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
 $B(x_B; y_B; z_B)$

Operazioni tra vettori



$$\bullet \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z) \quad \bullet \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$$

$$\bullet k\vec{a} = (ka_x; kb_y; kb_z), k \in \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ prodotto vettoriale per uno scalare

$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

$\hookrightarrow$ prodotto scalare (vettore $\cdot$ vettore $= \mathbb{R}$)

Condizioni reciproche tra vettori

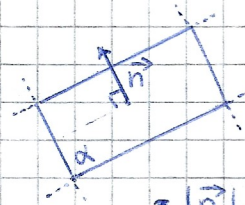
$\vec{a}(a_x; a_y; a_z) \vec{b}(b_x; b_y; b_z)$ NB due vettori $|\vec{a}| \neq 0 \wedge |\vec{b}| \neq 0$

• $\vec{a} \parallel \vec{b} : \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \text{costante} \iff \vec{a} = k\vec{b}, k \in \mathbb{R}$
 $\hookrightarrow \vec{a}(kb_x; kb_y; kb_z)$

• $\vec{a} \perp \vec{b} : \alpha = \frac{\pi}{2} \therefore |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0 \rightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Il piano in $\mathbb{R}^3$

$\alpha: ax + by + cz + d = 0 \quad \vec{n}(a; b; c)$ Eq. cartesiana
 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $\downarrow$ $(a, b, c \neq 0 \text{ allo stesso tempo, almeno 1 dei 3 } \neq 0 \text{ se no } \exists \alpha)$
 vettore NORMALE al piano ($\perp$)



$|\vec{n}| \neq 0 \therefore$
 • almeno UNA tra $a, b, c \neq 0$

$\alpha: a(x-x_p) + b(y-y_p) + c(z-z_p) = 0$ Eq. piano passante per $P(x_p; y_p; z_p)$
 $\vec{n}(a; b; c)$

a, b, c : parametri direttori della direzione normale al piano d : generico numero $\in \mathbb{R}$
 ~~$d \neq 0, 0, 0$~~

Note importanti: • se $d=0, 0(0; 0; 0) \in \alpha$

• se uno tra $a, b, c = 0$, $\alpha \parallel$ one coordinato relativo alle variabili uscite nell'equazione di α e $\alpha \perp$ piano individuato dall' n degli altri 2 variabili

$\downarrow$
 $a=0 \quad b=0 \quad c=0$
 $\alpha \parallel \text{one } x \quad \alpha \parallel \text{one } y \quad \alpha \parallel \text{one } z$
 $\alpha \perp \text{Oyz} \quad \alpha \perp \text{Ozx} \quad \alpha \perp \text{Oxy}$

• se 2 tra $a, b, c = 0$, $\alpha \parallel$ one coordinati relativi alle 2 variabili che non compaiono in α ; $\alpha \parallel$ piano coordinato che i due assi $\parallel$ definiscono

$\downarrow$
 $a=0, b=0 \quad a=0, c=0 \quad b=0, c=0$
 $\alpha \parallel \text{one } x \wedge \alpha \parallel \text{one } y \quad \alpha \parallel \text{one } x \wedge \alpha \parallel \text{one } z \quad \alpha \parallel \text{one } y \wedge \alpha \parallel \text{asse } z$
 $\alpha \parallel \text{Oxy} \quad \alpha \parallel \text{Oxz} \quad \alpha \parallel \text{Oyz}$
 $\alpha: z=k, k \in \mathbb{R} \quad \alpha: y=k, k \in \mathbb{R} \quad \alpha: x=k, k \in \mathbb{R}$

Piano per 3 punti $A, B, C \quad \alpha: ax + by + cz + d = 0$ NB A, B, C non devono essere allineati

$\begin{cases} A \in \alpha \\ B \in \alpha \\ C \in \alpha \end{cases} \rightarrow$ ricavo dal sistema $\rightarrow$ scrivo nell'eq. generica di α a, b, c infinite ai d , poi pongo $d \neq 0$ (altrimenti $\exists$ piano α) e DIVIDO TUTTO PER d
 $\rightarrow$ una volta diviso per d , rimane l'equazione di α cercata, con $a, b, c \neq 0; a, b, c \in \mathbb{R}$

Posizioni reciproche di 2 piani $\alpha: ax+by+cz+d=0$ $a',b',c',d' \neq 0$
 con il sistema di equazioni $\beta: a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{se } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'} \rightarrow \alpha \parallel \beta \wedge \alpha \neq \beta \text{ (piani paralleli e distinti)} \\ \text{se } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \rightarrow \alpha = \beta \text{ (} \forall P(x_p, y_p, z_p) \in \alpha \Rightarrow P \in \alpha' \text{)} \\ \quad \rightarrow \text{(piani coincidenti)} \end{array}$

alternativi: $\exists \alpha \cap \beta$ (piani incidenti, il loro incastro forma una RETTA)

Condizioni vettoriali di $\parallel$ e $\perp$ di 2 piani

$\alpha \parallel \beta: \vec{n}(a;b;c) \text{ vettore normale a } \alpha$
 $\vec{n}'(a';b';c') \text{ vettore normale a } \beta \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \rightarrow \text{se vale anche } \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \rightarrow \alpha = \beta \\ \text{se non vale } \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \rightarrow \alpha \parallel \beta \wedge \alpha \neq \beta \end{array} \right.$
 $\vec{n} \parallel \vec{n}'$

$\exists (\alpha \cap \beta): \text{non vale il parallelismo} \rightarrow \text{caso particolare: } \alpha \perp \beta = \vec{n} \perp \vec{n}' = 0$
 $\rightarrow \text{piani incidenti}$
 $\vec{n} \perp \vec{n}'$
 $a a' + b b' + c c' = 0$

Distanza punto-piano

$\alpha: ax+by+cz+d=0$ $P(x_p, y_p, z_p)$ $d_{p,\alpha} = \frac{|ax_p+by_p+cz_p+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

La retta in $\mathbb{R}^3$



$$r: \begin{cases} x = x_p + k \\ y = y_p + m \\ z = z_p + n \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

$P \in r$ (punto generico)

$\vec{v}(l;m;n)$ vettore direzione della retta

k : parametro che individua, al suo valore in $\mathbb{R}$, $\forall P \in r$

Equazione parametrica

Note: se $l=0$, $r \parallel Oyz$ se $l=m=0$, $r \parallel \text{asse } z$
 se $m=0$, $r \parallel Oxz$ se $l=n=0$, $r \parallel \text{asse } y$
 se $n=0$, $r \parallel Oxy$ se $m=n=0$, $r \parallel \text{asse } x$

$$r: \frac{x-x_p}{l} = \frac{y-y_p}{m} = \frac{z-z_p}{n} \quad \text{con } l, m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Eq. cartesiana della retta

(cioè il parametro k in tutte e 3 le equazioni della parametrica e i giugos invarianti senza k , così k è lo stesso!)

Retta per 2 punti A e B

Richiedi

- vettore $\vec{AB}$, che è il vettore direzione della retta, come visto sopra
- Usa uno dei 2 punti (A o B) per scrivere le equazioni parametriche della retta cercata

Retta come $\cap$ di due piani α e $\beta \rightarrow$ vedere sopra le posizioni reciproche di 2 piani con il sistema

Retta come $\alpha \cap \beta$: da 1 ai piani alla forma parametrica e viceversa

$\alpha \rightarrow$ pongo una variabile

β (tra x, y, z) uguale al mio parametro $\rightarrow$ sostituisco e mi ricavo alla forma:

$\begin{cases} x = xp + ek \\ y = yp + mk \\ z = zp + nk \end{cases}$ dove una delle 3 equazioni avrò il 2° membro costante solo k

$$\vec{r}(e; m; n)$$

Procedo inverso: uso la k da 1 delle 3 equazioni parametriche e la sostituisco nelle altre 2, ottenendo i 2 piani cercati α e β .

Fondo ai piani con una retta in comune

$\alpha \cap k: h(\alpha) + k(\alpha') = 0, h, k \in \mathbb{R} \rightarrow$ se $h=0$ ottengo $\alpha': \dots$ (con $k=1$)
se $k=0$ ottengo $\alpha: \dots$ (con $h=1$)

Posizioni reciproche di 2 rette - Procedi da seguire

$r: \begin{cases} x = xp + ek \\ y = yp + mk, k \in \mathbb{R} \\ z = zp + nk \end{cases} \vec{r}(e; m; n) \text{ per}$
 $s: \begin{cases} x = xp + e't \\ y = yp + m't, t \in \mathbb{R} \\ z = zp + n't \end{cases} \vec{s}(e'; m'; n'), Q \in s$

- ① verifico $\parallel$ (e sostanzialmente $\equiv$)
se ① non è valido...
- ② verifico incidenza o sghembiati
- ③ verifico $\perp$

④ $r \parallel s$? Controlla se $\vec{r} \parallel \vec{s} \rightarrow \frac{e}{e'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$?

Si: ⑤ $\exists r \cap s$? Ritrovo il punto $P \in r$ e verifico se $P \in s$

se $P \in s$ allora $r \equiv s$
se $P \notin s$ $r \parallel s$ e $r \neq s$

No: ⑥ $\exists r \cap s$? Ritrovo il punto $P \in r$ e verifico se $P \in s$

se $P \in s$ allora r ed s sono INCIDENTI
se $P \notin s$ allora r ed s sono SGHEMBIATI

⑦ $r \perp s$? Controlla se $\vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \rightarrow ee' + mm' + nn' = 0$?

Si: r ed s sono INCIDENTI e PERPENDICOLARI
No: r ed s sono INCIDENTI

⑧ $r \perp s$? Controlla se $\vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \rightarrow ee' + mm' + nn' = 0$?

Si: r ed s sono SGHEMBIATI e PERPENDICOLARI
No: r ed s sono SGHEMBIATI

Geometria analitica nello spazio - Parte 2

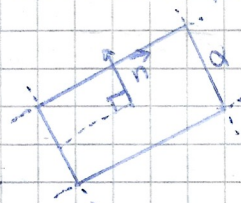
Posizione reciproca di retta e piano

$$r: \begin{cases} x = x_p + ek \\ y = y_p + mk \\ z = z_p + nk \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

$$\alpha: ax + by + cz + d = 0 \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

$$\vec{n}(a, b, c)$$

$$\vec{v}(l, m, n) \text{ per}$$



$$r \parallel \alpha: \vec{v} \perp \vec{n} \therefore la + mb + nc = 0 \quad (\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0)$$

$$r \perp \alpha: \vec{n} \parallel \vec{v} \therefore \frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$$

$\exists r \cap \alpha$: se non sono $\parallel$ e non sono $\perp$

Distanza punto-retta

$$\begin{array}{l} P(x_p, y_p, z_p) \\ \perp \\ P \notin r \\ Q(x_q, y_q, z_q) \in r \end{array} \quad r: \begin{cases} x = x_q + ek \\ y = y_q + mk \\ z = z_q + nk \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

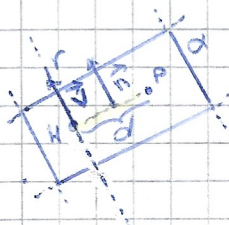
$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ Piano } \alpha \text{ passante per } P \text{ e } \perp r \\ \alpha: a(x - x_p) + b(y - y_p) + c(z - z_p) = 0 \\ \vec{v} \equiv \vec{n} \text{ quindi } a=l, b=m, c=n \\ (\text{perch\'e } \alpha \perp r) \\ \alpha: l(x - x_p) + m(y - y_p) + n(z - z_p) = 0 \end{array}$$

$\textcircled{2}$ $\alpha \cap r$ in un punto H : sistema tra le 3 equazioni parametriche della retta e α : trovo il valore del parametro k che mi restituisce il punto H

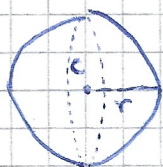
$\textcircled{3}$ siccome $H \in r$ le sue coordinate sono $H(x_q + ek; y_q + mk; z_q + nk)$
 $\hookrightarrow$ sostituisco il valore di k trovato dal sistema e trovo il punto H

$\textcircled{4}$ calcolo la distanza tra P e H utilizzando la formula della distanza tra 2 punti (vedi Parte 1)

$\hookrightarrow d_{p,r} = PH$ (dove H \u00e8 il punto dove $r \cap \alpha$, dove α \u00e8 il piano $\perp r$ passante per P)



Sfera in $\mathbb{R}^3$



$$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad \text{Eq. implicita } (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2 \quad \text{Eq. data Centro e Raggio}$$

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) \quad \text{Centro della Sfera } (a, b, c \text{ coefficienti dell'equazione in forma IMPLICITA})$$

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d} \quad \text{Formula raggio } (a, b, c, d \text{ coefficienti dell'equazione in forma IMPLICITA, } \exists r \text{ se } (a^2 + b^2 + c^2 - 4d \geq 0))$$

Posizione reciproca di sfera e piano

$$\Sigma: (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2 \quad \alpha: ax + by + cz + d = 0 \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

$$C(x_c; y_c; z_c) \quad r \geq 0$$

① Calcola $dc, d = \frac{|ax_c + by_c + cz_c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

② $dc, d \rightarrow$

- $dc, d < r$: $\alpha \cap \Sigma$ in una circonferenza
- $dc, d = r$: α è Tangente a Σ in UN PUNTO
- $dc, d > r$: α non incontra Σ in nessun punto

Piano tangente alla sfera $\Sigma: (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2 \quad \alpha: ax + by + cz + d = 0$

$\Sigma: C(x_c; y_c; z_c)$ ^{enunciato sotto:} Dato $P(x_p; y_p; z_p) \in \Sigma$ come punto di tangenza, trovare l'equazione di α

- Pomaggi
- ① Inviare il vettore $\vec{PC}(x_p - x_c; y_p - y_c; z_p - z_c)$ di modulo r (cioè $|\vec{PC}| = r$)
 - ② Per definizione di tangenza, $\alpha \perp r \Rightarrow \alpha \perp \vec{PC} \Rightarrow \alpha \perp \vec{PC} \therefore \vec{PC} \equiv \vec{n}$
 - ③ Siccome $\alpha \perp \vec{PC}$, $\vec{PC}$ può essere considerato il VETTORE NORMALE AL PIANO
 - ④ Trovo l'equazione di α dato il punto $P \in \alpha$ (in quanto punto di tangenza) e il vettore normale $\vec{PC}$ (sapendo che $PC_x = a, PC_y = b, PC_z = c$)
 $\hookrightarrow$ Vedi parte 1 poiché $\vec{PC} \equiv \vec{n}$

Caso inverso: dato α , trova il punto P di tangenza tra α e Σ

① vettore $\vec{PC}(x_p - x_c; y_p - y_c; z_p - z_c)$ ② $\alpha \perp \vec{PC} \therefore \vec{n}(a; b; c) \equiv \vec{PC}$

③ Pongo $\begin{cases} x_p - x_c = a & \text{e risolvo per} \\ y_p - y_c = b & \text{le coordinate} \\ z_p - z_c = c & \text{di } P(x_p; y_p; z_p) \end{cases}$
 $\hookrightarrow$ ugualizziamo tra le componenti